Ejercicio: Dado el grafo no orientado $G = (W, F)$, donde $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\{x, y\} \in F$ si y sólo si x e y tienen la misma paridad o $x + y = 9$. Se pide:

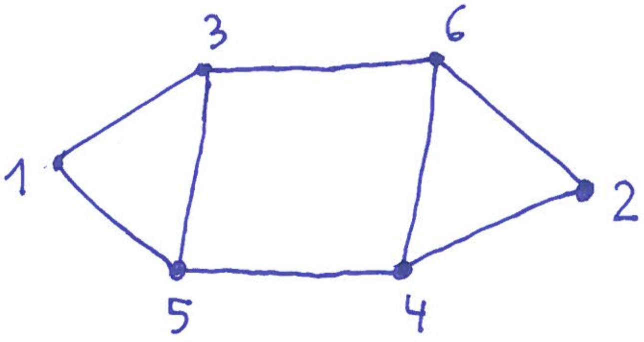
i. Calcular su matriz de adyacencia y representarlo gráficamente.

pares $\to$ 2, 4, 6 $\qquad$ $3+6=9$

impares $\to$ 1, 3, 5 $\qquad$ $4+5=9$

$$F = \{\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



ii. Definir distancia y geodésica. Calcular la distancia y el número de geodésicas del primer al último vértice.

La distancia entre dos vértices es la longitud de cualquiera de los caminos más cortos que conectan dichos vértices, a estos caminos (de menor longitud) los llamamos geodesicas.

Según el teorema del número de caminos el número de caminos de longitud l entre los vértices v_i y v_j coincide con la coordenada (i,j)-ésima de A^l donde A es la matriz de adyacencia del grafo. Por tanto, la distancia entre los vértices 1 y 6 será el primer número natural positivo n tal que el coeficiente $(1,6)$-ésimo de A^n es distinto de cero. Además dicho coeficiente será el número de geodésicas entre dichos vértices.

$d(1,6) = 2$

nº geodésicas = 1

$$A^2 = \begin{pmatrix} & & & & & \boxed{1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

iii. Definir grafo de Euler. Razonar si G es un grafo de Euler.

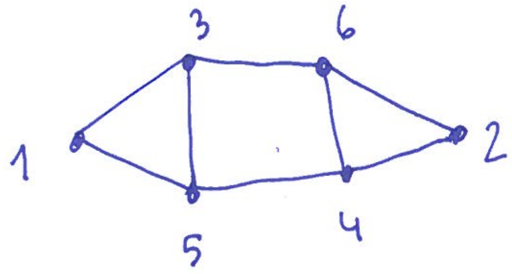
Un grafo no orientado y sin vértices aislados es un grafo de Euler si posee al menos un ciclo de Euler, es decir, un camino cerrado que pasa por todas y cada una de las aristas del grafo exactamente una vez.

El siguiente teorema nos caracteriza los grafos no orientados de Euler:

TEOREMA

Un grafo no orientado y conexo es de Euler si y sólo si el grado de cada vértice es par.

Recordar que un grafo es conexo si para cada par de vértices existe un camino que los conecta. Además el grado de un vértice es el número de lados incidentes en dicho vértice.



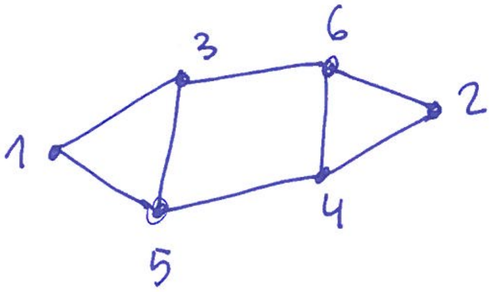
$gr(1) = 2 = gr(2)$

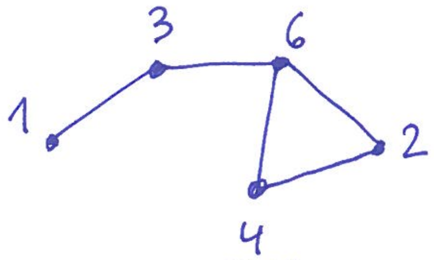
$gr(3) = 3 = gr(4) = gr(5) = gr(6)$

G no es de Euler

iv. Definir articulación. Razonar si el vértice 5 es una articulación.

En un grafo conexo, un vértice es una **articulación** si el subgrafo resultante de eliminar dicho vértice y todos los lados que inciden en él ya no es conexo (pierde la propiedad de conexión)





CONEXO

5 no es una **articulación**